Quelques mesures physiques en océanographie

Mohamed Afekir (*cpgeafek@gmail.com*)
École Royale de l'Air
CPGE - Marrakech

Partie 1

Étude de la compressibilité et e la conductivité de l'eau océanique

1. Étude de la compressibilité de l'eau océanique

1.1. Relation fondamentale de l'hydrostatique :

$$\vec{f}_v - \overrightarrow{grad}P = \vec{0}$$

$\vec{f}_v$: densité de forces volumiques appliquées sur l'élément de fluide du bassin, dans le référentiel d'étude.

$$\rho\vec{g} = -\rho g\vec{u}_z = \overrightarrow{grad}P = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{u}_z \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = -\rho g \end{cases}$$

La pression P est, donc, indépendante de x et de y, d'où:

$$\boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = \left(\frac{dP}{dz}\right) = -\rho g}$$

1.2. Le coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_o = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,s}$$

$$\text{On a : } \rho V = m \Rightarrow \ln\rho + \ln V = k \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$$

$$\text{Soit : } \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_{T,s} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,s} \Rightarrow \boxed{\chi_o = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_{T,s}}$$

1.3.

D'aprè s les questions 1.1. et 1.2. on a : $\begin{cases} dP = -\rho g dz \\ \text{et} \\ d\rho = \rho\chi_o dP \end{cases}$

D'où : $\boxed{\dfrac{d\rho}{dz} + \rho^2\chi_o g = 0}$

<u>Solution</u> : $\dfrac{1}{\rho(z)} = \chi_o g + \dfrac{1}{\rho(0)}$ ou : $\boxed{\rho(z) = \dfrac{\rho(0)}{1 + \chi_o\rho(0)gz}}$

1.4. Sur la hauteur totale h du bassin :

$$\rho(h) = \frac{\rho(0)}{1 + \chi_o\rho(0)gh} \Rightarrow \rho(h) = \rho(0)\left(1 - \chi_o\rho(h)gh\right) \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = -\rho(0)\chi_o gh$$

D'où : $\boxed{\dfrac{\Delta\rho}{\rho} = \dfrac{\chi_o\rho(h)gh}{\chi_o\rho(h)gh - 1}}$

La masse volumique ρ *déminue* lorsque z *augmente*.

1.5.

Hauteur	90 m	100 m	10 km
$\dfrac{\Delta\rho}{\rho}$	$-3{,}62\times10^{-4}$	$-4{,}02\times10^{-4}$	$-419{,}07\times10^{-4}$

1.6.

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{\rho(0)g}{1+\rho(0)g\chi_o z} \Rightarrow P - P(0) = -\frac{1}{\chi_o}\ln\left(1+\rho(0)g\chi_o z\right)$$

Soit : $\boxed{P(z) = P(0) - \dfrac{1}{\chi_o}\ln\left(1+\rho(0)g\chi_o z\right)}$

1.7. Application numérique

$$P(h) = P(0) - \frac{1}{\chi_o}\ln\left(1+\rho(0)g\chi_o h\right) = P_o$$

$$\Rightarrow P(0) = \frac{1}{\chi_o}\ln\left(1+\rho(0)g\chi_o h\right) + P_o \quad \text{avec :} \quad \rho(0) = \frac{\rho(h)}{1-\rho(h)g\chi_o z}$$

Soit : $\boxed{P(0) = P_o - \dfrac{1}{\chi_o}\ln\left(1-\rho(h)g\chi_o h\right)}$

Hauteur	90 m	100 m	10 km
$P(0)$		$11{,}05\times10^5$	$101{,}65\times10^5$

2. Étude de la conductivité de l'eau océanique

2.1. $\boxed{\Phi_{1c}(t) = B_1(t)S \ \text{ et } \ \Phi_{2c}(t) = B_2(t)S}$

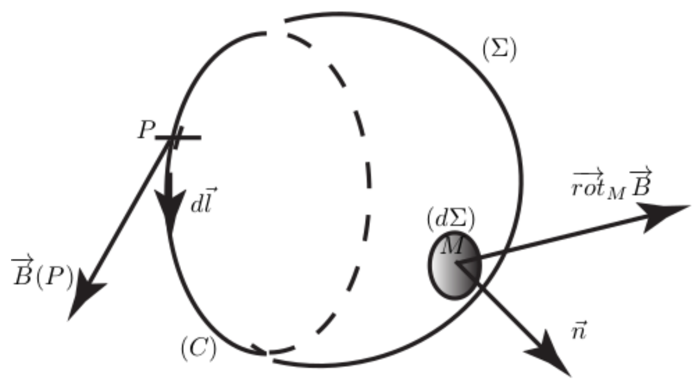
2.2. Forme intégrale du théorème d'AMPÈRE :
Soient un contour orienté (C), et une surface (Σ) s'appuyant sur (C) (c'est à dire *bordée* par celui-ci). Soit un élément de suface $(d\Sigma)$ entourant un point M de (Σ).

$$\text{Forme locale} \quad : \quad \vec{\nabla}_M \wedge \vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}_M \vec{B}(M)\ \mu\vec{j}$$

$$\text{Soit} \quad \iint_{(\Sigma)} \left(\overrightarrow{rot}_M \vec{B}(M)\right).d\Sigma\,\vec{n} = \iint_{(\Sigma)} \mu\vec{j}.d\Sigma\,\vec{n}$$

$$\text{Or :} \begin{cases} \iint_{(\Sigma)} \left(\overrightarrow{rot}_M \vec{B}(M)\right).d\Sigma\,\vec{n} = \oint_{(C)} \vec{B}(P).d\vec{l} & \text{Thé orè me de Stokes} \\ I = \iint_{(\Sigma)} \vec{j}.d\Sigma\,\vec{n} & \text{Intensité du courant enlacé e par } (C) \end{cases}$$

$$\text{D'où :} \oint_{(C)} \vec{B}(P).d\vec{l} = \mu I_{enlacee\ par\ le\ contour\ (C)}$$



2.3. Champ magnétique circulant dans le tore (t_1)

$$B_1(t)\ell = \mu(N_1 i_1(t) + N_3 i_3(t) + i(t)) \Rightarrow \boxed{B_1(t) = \frac{\mu}{\ell}(N_1 i_1(t) + N_3 i_3(t) + i(t))}$$

2.4. Champ magnétique circulant dans le tore (t_2)

$$\boxed{B_2(t) = \frac{\mu}{\ell}(N_2 i_2(t) + N_4 i_3(t) - i(t))}$$

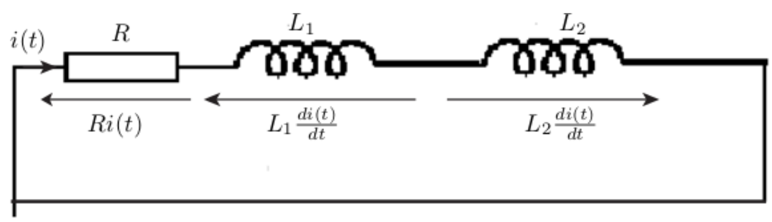
2.5. On suppose que l'on place un voltmètre d'impédence d'entrée infinie à la sortie du tranformateur (T_2), $\Longrightarrow$ $i_2(t) = 0$, soit:

$$\boxed{B_2(t) = \frac{\mu}{\ell}(N_4 i_3(t) - i(t))}$$

2.6.

$$\boxed{\Phi_{2c}(t) = B_2(t)S = \frac{\mu}{\ell}(N_4 i_3(t) - i(t))} \quad \textbf{(1)}$$

2.7. Le circuit électrique constitué de la boucle d'eau océanique est équivalent au circuit ci-dessous:



$$\begin{cases} \Phi_{1c} = L_1 i(t) \\ \Phi_{2c} = L_2 i(t) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{Ri(t) + \frac{d\Phi_{1c}}{dt} - \frac{d\Phi_{2c}}{dt} = 0} \quad \textbf{(2)}$$

2.8.

$$\boxed{u_1(t) = N_1\frac{d\Phi_{1c}}{dt}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_3(t) = N_3\frac{d\Phi_{1c}}{dt}}$$

2.9.

$$\boxed{u_2(t) = N_2\frac{d\Phi_{2c}}{dt}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_4(t) = N_4\frac{d\Phi_{2c}}{dt}}$$

2.10. Loi des mailles :

$$u_3(t) + u_4(t) = R_p i_3(t) = N_3\frac{d\Phi_{1c}}{dt} + N_4\frac{d\Phi_{2c}}{dt}$$

$$\Longrightarrow \boxed{i_3(t) = -\frac{1}{R_p}(N_3\frac{d\Phi_{1c}}{dt} + N_4\frac{d\Phi_{2c}}{dt})} \quad \textbf{(3)}$$

2.11. Des équations **(1)** **(2)** et **(3)**, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_{2c}\ell}{S\mu} &= -\frac{N_4}{R_p}\left(N_3\frac{d\Phi_{1c}}{dt} + N_4\frac{d\Phi_{2c}}{dt}\right) - \frac{1}{R}\left(\frac{d\Phi_{2c}}{dt} - \frac{d\Phi_{1c}}{dt}\right)\\ &= \frac{d\Phi_{1c}}{dt}\left(\frac{1}{R} - \frac{N_3N_4}{R_p}\right) - \frac{d\Phi_{2c}}{dt}\left(\frac{1}{R} + \frac{N_4^2}{R_p}\right)\end{aligned}$$

$$\text{Soit :} \quad \boxed{\frac{\ell R}{S\mu}\Phi_{2c} = \left(1 - N_3N_4\frac{R}{R_p}\right)\frac{d\Phi_{1c}}{dt} - \left(1 + N_4^2\frac{R}{R_p}\right)\frac{d\Phi_{2c}}{dt}}$$

2.12.

$$\begin{aligned}\underline{u}_1(t) &= \underline{U}_1\sqrt{2}\exp i\omega t & \text{et} \quad \underline{u}_2(t) &= \underline{U}_2\sqrt{2}\exp i\omega t\\ &= N_1\frac{d\underline{\Phi}_{1c}}{dt} = i\omega N_1\underline{\Phi}_{1c} & &= N_2\frac{d\underline{\Phi}_{2c}}{dt} = i\omega N_2\underline{\Phi}_{2c}\end{aligned}$$

L'équation précédente en notation complexe :

$$\frac{\ell R}{S\mu}\underline{\Phi}_{2c} = \left(1 - N_3N_4\frac{R}{R_p}\right)i\omega\underline{\Phi}_{1c} - \left(1 + N_4^2\frac{R}{R_p}\right)i\omega\underline{\Phi}_{2c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ell R}{S\mu}\frac{\underline{U}_2}{i\omega N_2} = \left(1 - N_3N_4\frac{R}{R_p}\right)\frac{\underline{U}_1}{N_1} - \left(1 + N_4^2\frac{R}{R_p}\right)\frac{\underline{U}_2}{N_2}$$

$$\text{Ou} \quad \boxed{\frac{\underline{U}_2}{N_2}\left(1 - \frac{i\ell R}{\omega S\mu} + N_4^2\frac{R}{R_p}\right) = \left(1 - N_3N_4\frac{R}{R_p}\right)\frac{\underline{U}_1}{N_1}}$$

2.13. On suppose dans la suite que $N_1 = N_2$ et que $N_3 = N_4$, ainsi que $RN_4^2 << R_p$:

$$\underline{U}_2\left(1 - \frac{il\ell R}{\omega S\mu}\right) = \underline{U}_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\ell R}{\omega S\mu}\right)^2 > 1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{U_2 < U_1}$$

2.14. De la question précédente on en déduit l'expression de la résistance R

$$\boxed{R = \frac{S\omega\mu}{\ell}\sqrt{\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 - 1}}$$

2.15.

$$\boxed{R = \frac{\ell_T}{\sigma S_T}}$$

2.16.

$$\frac{\ell_T}{\sigma S_T} = \frac{S\omega\mu}{\ell}\left(\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{S\omega\mu}{\ell}\frac{U_1}{U_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{\ell\ell_T}{SS_T\omega U_1\mu}U_2}$$

2.17. Une simple mesure de la valeur efficace de la tension $u_2(t)$ permet d'accéder à la mesure de la conductivité électrique de l'eau océanique.

Partie 2

Mesure des variations du niveau des océans

1. Mdélisation méanique d'une lame de quartz

1.1. Aspet énergétique

1.1.1.

$$E_m = \frac{1}{2}m_q\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

- k : constante de raideur , unité : $kg.s-2$
- $$\frac{1}{2}m_q\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \ : \ \text{É nergie ciné tique de la lame } (LQ)$$
- $$\frac{1}{2}kx^2 \ : \ \text{É nergie potentielle élastique de la lame } (LQ)$$

1.1.2. Puissance électrique instantanée $p(t)$:

$$p(t) = u(t)\,i(t)$$

1.1.3. Travail élémentaire de la force de frottements $\vec{F}_d$:

$$\boxed{\delta W\left(\vec{F}_d\right) = \vec{F}_d.\vec{e}_x dx = -\gamma_q\left(\frac{dx}{dt}\right)dx}$$

1.1.4. Théorème de l'énergie mécanique E pour une masse ponctuelle:

$$\frac{dE}{dt} = P\left(\vec{f}_{nc}\right) \ : \ \text{puissance des forces non coservatives}$$

1.1.5.

$$E = E_m + E_e = \frac{1}{2}m_q\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 + E_e$$

Le théorème de l'énergie mécanique appliqué à la lamme donne :

$$\frac{dE}{dt} = P\left(\vec{F}_d\right) = \frac{\delta W\left(\vec{F}_d\right)}{dt} = -\gamma_q\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$
$$\text{et } \frac{dE}{dt} = \frac{dE_m}{dt} + \frac{dE_e}{dt} \text{ avec } \frac{dE_e}{dt} = p(t)$$

<u>Soit</u> : $m_q\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_q\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$ (2) <u>avec</u> : $\boxed{F(t) = -\frac{p(t)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = -\frac{u(t)i(t)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}}$

1.1.6. L'équation (2) précédente pourra se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{F(t)}{m_q} \quad (3) \quad \underline{\text{tels que}} : \begin{cases} \boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m_q}}} \\ \boxed{Q = m_q\frac{\omega_o}{\gamma_q} = \frac{\sqrt{km_q}}{\gamma_q}} \end{cases}$$

1.2. Mesure des caractéristiques mécaniques de la lame de quartz

1.2.1.

1.2.2. Le role de la compensatrice est de compenser le déphasage supplémentaire que présente le faiseau laser après réflexion sur les deux miroirs.

1.2.3. Lame d'air d'épaisseur $\varepsilon(t)$

$$\boxed{\varepsilon(t) = x(t) = e(t) - e_o}$$

La lamme d'air , ainsi constituée, est éclairée sous incidence *normale*.

1.2.4. Expression de l'intensité lumineuse I au niveau du détecteur:

$$I = I_o\left(1 + cos\varphi\right)$$

φ set le déphasage entre les deux rayon qui arrivent au niveau du détecteur.

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_o}\delta = \frac{2\pi}{\lambda_o}(2\varepsilon(t)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = I_o\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda_o}\varepsilon(t)\right)\right)} \ (4)$$

1.2.5. Lors du réglage préliminaire $\varepsilon = 0 \implies \boxed{I = 2I_o}$

1.2.6.

$$\boxed{I(t) = I_o\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda_o}x(t)\right)\right)}$$

1.2.7. Au niveau du étecteur, on observes des franges d'inteférence (franges d'égales inclinaison). Le rayon des anneaux obtenus déminu lorsque $e(t)$ augmente.

1.2.8. L'équation différentielle du mouvement de l'ensemble (M_2+LQ) s'écrit:(en lui appliquant le théorme de l'énergie mécanique)

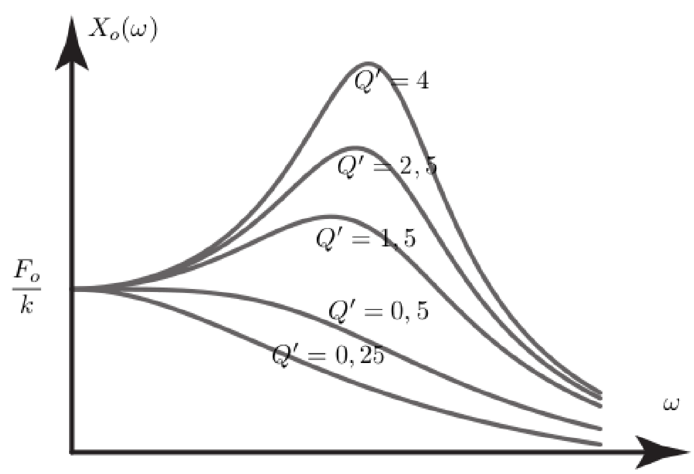
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_o'}{Q'}\frac{dx}{dt} + \omega_o'^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad \underline{\text{tels que}} : \begin{cases} m = m_q + m_m \\ \omega_o' = \sqrt{\dfrac{k}{m_q+m_m}} \\ Q' = \dfrac{m_q+m_m}{\gamma_q+\gamma_m}\omega_o = \dfrac{\sqrt{k(m_q+m_m)}}{\gamma_q+\gamma_m} \end{cases}$$

1.2.9. $F(t) = F_o cos\omega t$ et $x(t) = X_o(\omega)cos[\omega t + \Phi(\omega)]$

<u>En notation complexe</u> :
$$\begin{cases} \underline{x}(t) = \underline{X}_o(\omega)\exp i\omega t \quad \text{et} \quad \underline{F}(t) = F_o \exp i\omega t \\ \underline{X}_o(\omega) : \text{ Amplitude complexe } \quad \underline{X}_o(\omega) = X_o(\omega)\exp i\Phi(\omega) \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation différentielle (5), on en déduit :

$$\left(-\omega^2 - i\omega\frac{\omega_o'}{Q'} + \omega_o'^2\right)\underline{X}_o(\omega) = \frac{F_o}{m} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X_o(\omega) = \dfrac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{\left(\omega_o'^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\frac{\omega_o'^2}{Q'}}} \\ \Phi(\omega) = \arg \underline{X}_o(\omega) = \arctan\left|\dfrac{\omega\omega_o'}{Q'\left(\omega_o'^2 - \omega^2\right)}\right| \\ \cos\Phi(\omega) = \dfrac{\omega_o'^2 - \omega^2}{\sqrt{\left(\omega_o'^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\frac{\omega_o'^2}{Q'}}} \end{cases}$$



....A SUIVRE....